Mathématiques : analyse

Séance 3 : Fonctions

MATH-S-1011 et MATH-S-1021 — Université libre de Bruxelles
Solvay Brussels School of Economics and Management
Auteurs : Germain Van Bever et Davy Paindaveine

Contenu de la séance

Considérations générales

Injectivité, surjectivité et bijectivité

Composition, croissance, décroissance

Exemples importants

Contenu de la séance

Considérations générales

Injectivité, surjectivité et bijectivité

Composition, croissance, décroissance

Exemples importants

Fonctions

Soient A, B deux ensembles.

Définition 3.1

f est une fonction de A dans B (notation : $f : A \to B : x \mapsto f(x)$) $\iff$ f associe à chaque $x \in A$ un et un seul $f(x) \in B$.

$$f : \begin{pmatrix} A \longrightarrow B \\ x \longmapsto f(x) \end{pmatrix}$$

Exemples :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

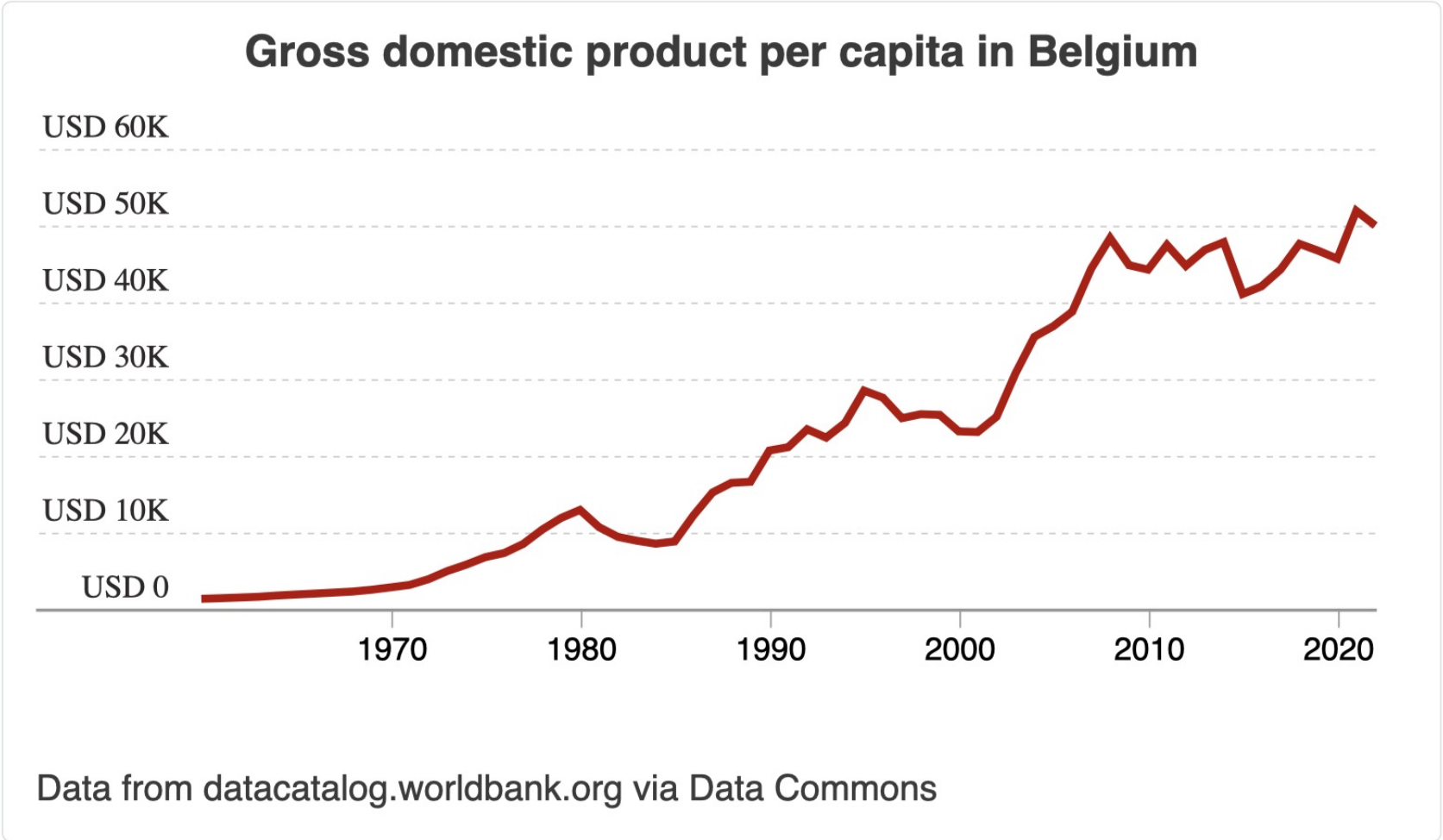
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$
- $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto 1/x$ $\rightarrow D_f = \mathbb{R}_0$.
- $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$
- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto n$
- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto n^2$
- $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R} : n \mapsto \log n$
- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto 25$

A est le domaine de définition de f (souvent noté D_f dans la suite).

↳ tous les x dans A tels que $f(x)$ $\begin{cases} \text{est calculable} \\ \text{existe} \end{cases}$

Tour de France

Produit intérieur brut



Produit cartésien

Définition 3.2

Soient A_1, A_2, …, A_n, n ensembles. Alors, le produit cartésien de A_1 et A_2 est $A_1 \times A_2 = \{(a_1, a_2) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}$. Le produit cartésien de A_1, A_2, …, A_n est $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}$. On notera $A^n = A \times A \times \ldots A$ (n fois).

Exemples :

- Si $A_1 = \{\text{potage, croquette, huîtres}\}$ est un ensemble d'entrées possibles et $A_2 = \{\text{carbonnade, boulet}\}$ est un ensemble de plats proposés, alors

  $$A_1 \times A_2 = \{(\text{potage, carbonnade}), (\text{potage, boulet}), \ldots, (\text{huîtres, boulet})\}$$

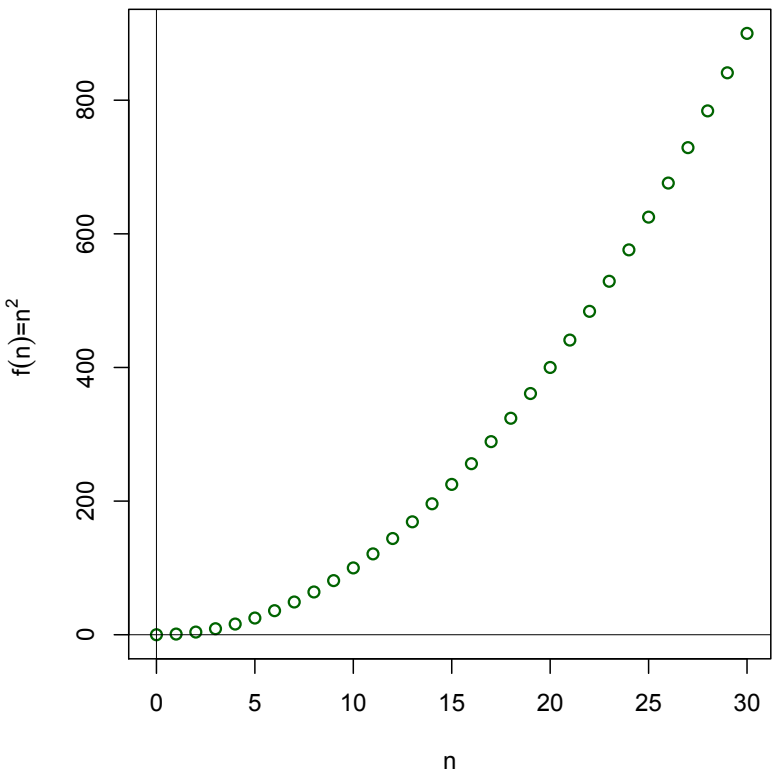
  représente l'ensemble des menus qu'on peut composer.
- $n \geq 3$: menus avec entrées (A_1), plats (A_2), et desserts (A_3) ?
- $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2),\ \text{où } x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ (pour la géométrie dans le plan).
- $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3),\ \text{où } x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ (pour la géométrie dans l'espace).

$\mathbb{C} = \{x + iy : x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$.

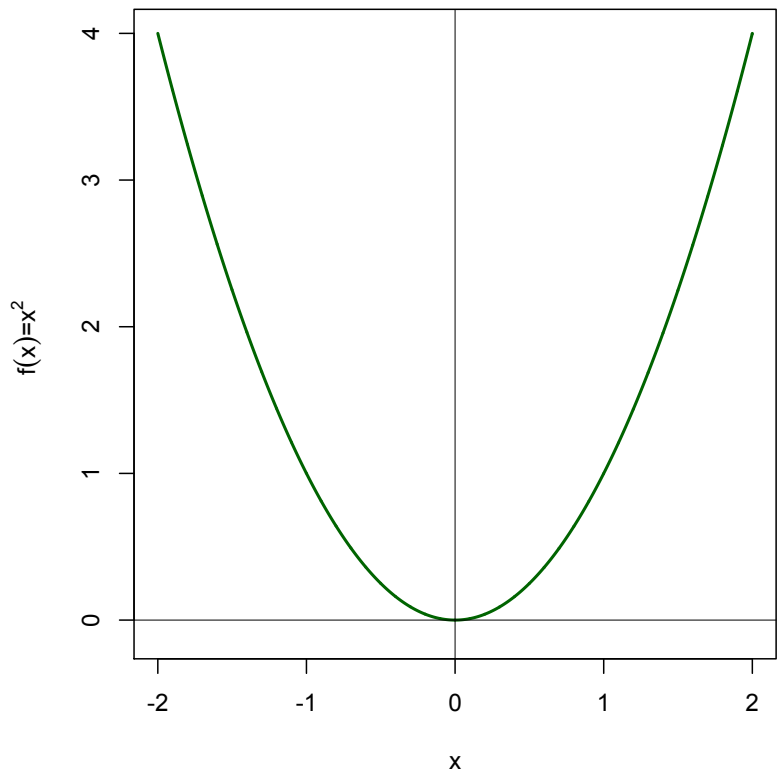
Graphe

Définition 3.3

Le graphe de $f : A \to B : x \mapsto f(x)$ *est le sous-ensemble* $\{(x, f(x)) : x \in A\}$ *de* $A \times B$.



$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto n^2$



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$

Ensemble image

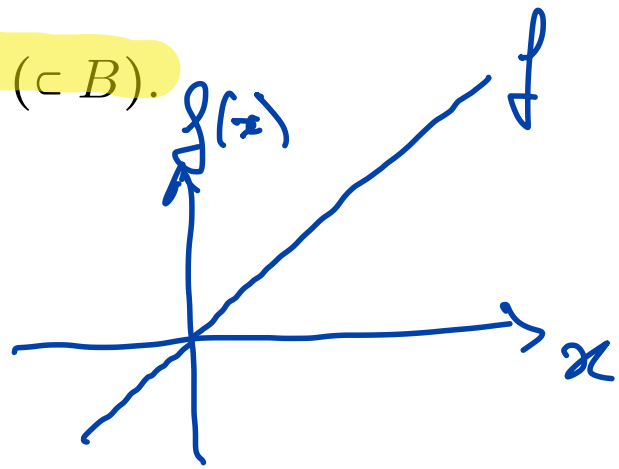
Pour $f : A \to B$, on peut prendre l'image de tout sous-ensemble de A.

Définition 3.4

Soit $A'(\subset A)$. Alors l'image de A' par f est le sous-ensemble de B donné par

$$f(A') = \{f(x) \ : x \in A'\} \ (\subset B).$$

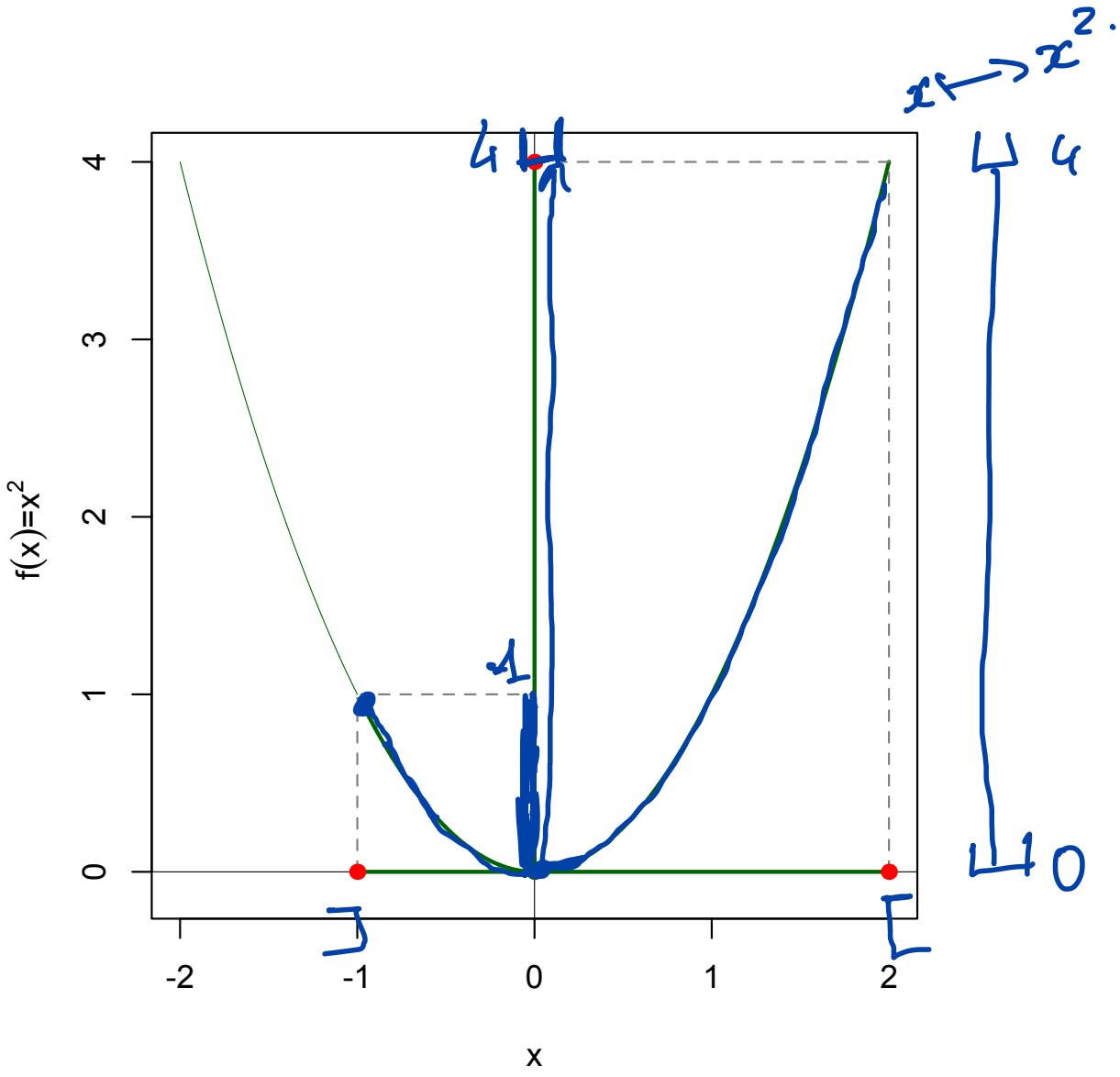
En particulier, l'image de f est $\mathrm{Im}_f = f(A)$.



Exemples :

- Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x$, on a $\mathrm{Im}_f = \mathbb{R}$.
- Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$, on a $\mathrm{Im}_f = \mathbb{R}^+$.
- Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$, on a $f(]-1, 2[) = [0, 4[$.

Ensemble image : exemple pratique



$$f(]-1,2[) = [0,4[.$$

Contenu de la séance

Considérations générales

Injectivité, surjectivité et bijectivité

Composition, croissance, décroissance

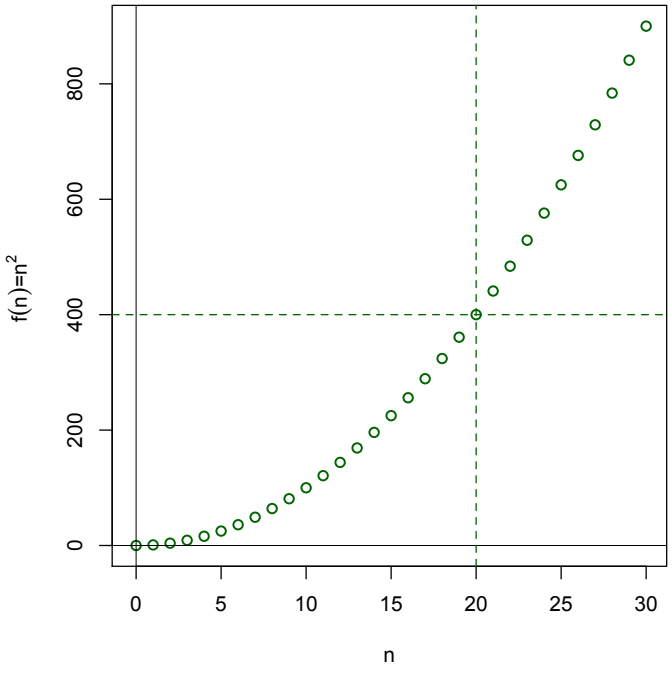
Exemples importants

Injectivité

Définition 3.5

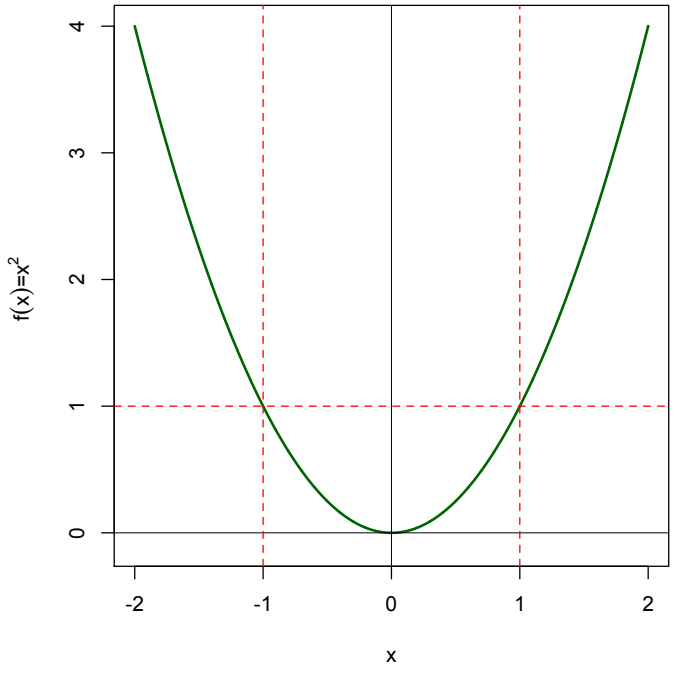
La fonction $f : A \to B$ *est injective* $\iff$ *si* $f(x_1) = f(x_2)$, *alors* $x_1 = x_2$, *ou encore*

$\iff$ *si* $x_1 \neq x_2$ $(x_1, x_2 \in A)$, *alors* $f(x_1) \neq f(x_2)$.



$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto n^2$

injective



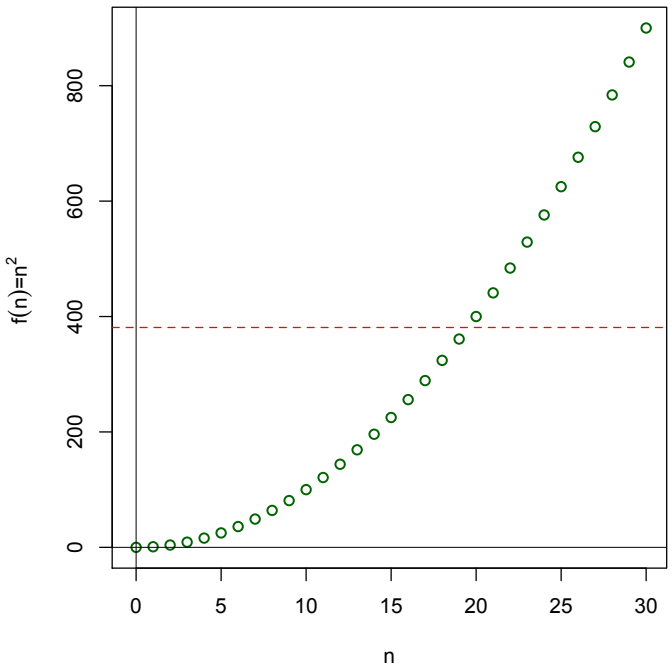
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$

non injective

Surjectivité

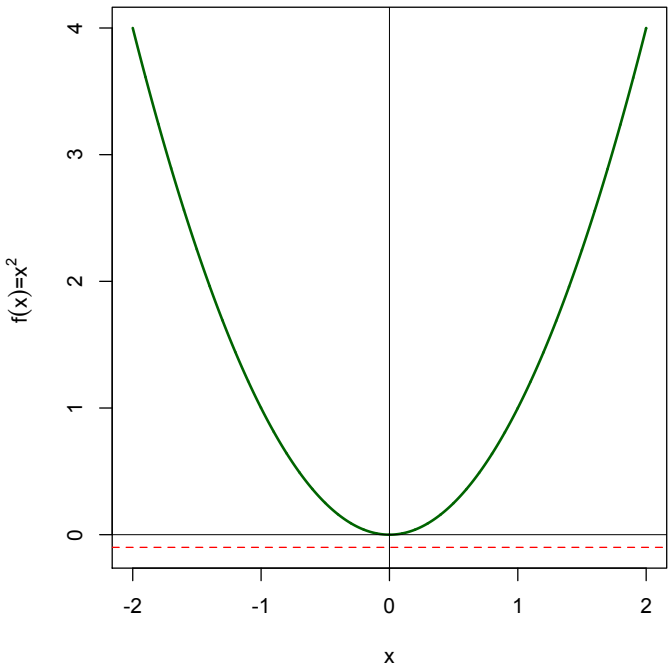
Définition 3.6

La fonction $f : A \to B$ *est surjective* $\iff$ *Pour tout* $y \in B$, *il existe* $x \in A$ *tel que* $y = f(x)$.



$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto n^2$

non surjective



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$

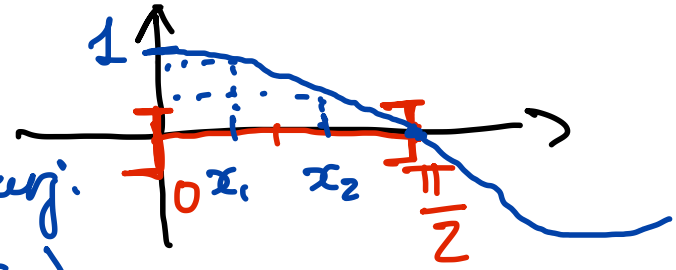
non surjective

Injectivité et surjectivité: remarques

- On retiendra que f est injective si tout $f(x)$ n'est l'image que d'un seul $x \in A$.
- De même, f est surjective si tout $y(\in B)$ est l'image d'au moins un $x(\in A)$.
- $f : A \to Im_f$ est toujours surjective (par exemple, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$ est surjective).

Interlude : 1-2-tous

f_3 :



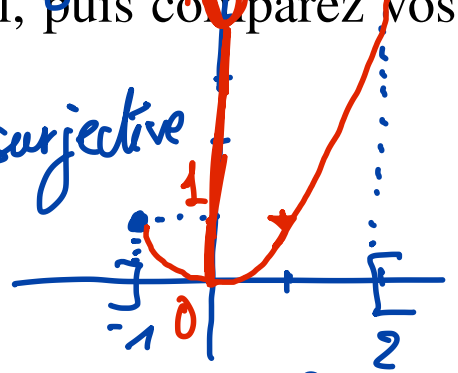
$\mathrm{Im} f_3 = [0;1[\Rightarrow f_3$ surj.

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

car f_3 strict ↘ : injective

Pour chaque fonction ci-dessous, déterminez (seul, puis comparez vos réponses) si elle est injective et/ou surjective. Justifiez.

$\mathrm{Im} f = f(]-1;2[) \Rightarrow f_1$ surjective



- $f_1 :]-1,2[\to [0,4[: x \mapsto x^2$,

pas injective : $x_1 = \frac{-1}{2}$, $x_2 = 1/2$.

- $f_2 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x}$,

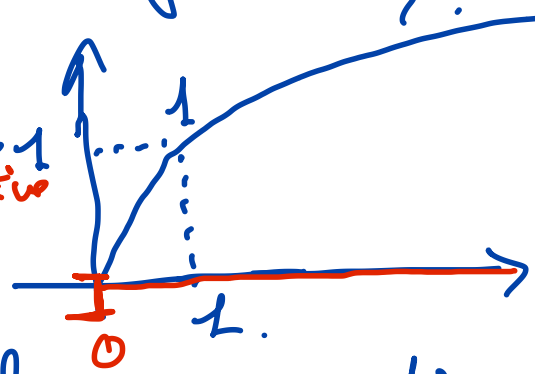
$f(x_1) = f(x_2) = \frac{1}{4}$. $x \mapsto \sqrt{x}$

- $f_3 : [-4,4] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)$, → pas surjective.

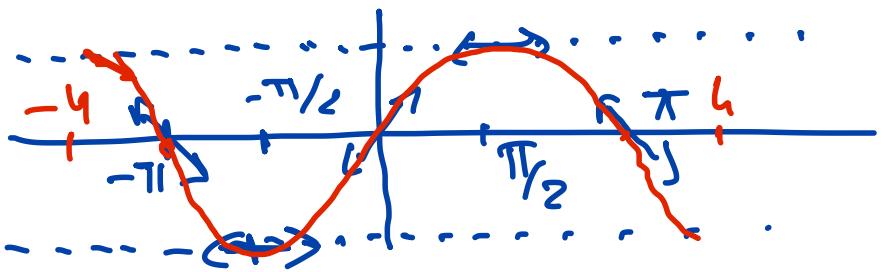
$\mathrm{Im} f_4$: surjectif ex : $2 = \sin(x)$ impossible

- $f_4 : [-4,4] \to [-1,1] : x \mapsto \sin(x)$,

↳ bijs pas injectif → pas injective ex : $x_1 = -\pi$, $x_2 = \pi$.



- $f_5 :]0, \frac{\pi}{2}] \to [0,1[: x \mapsto \cos(x)$.



f_2 non surjective.

f_2 injective ok.

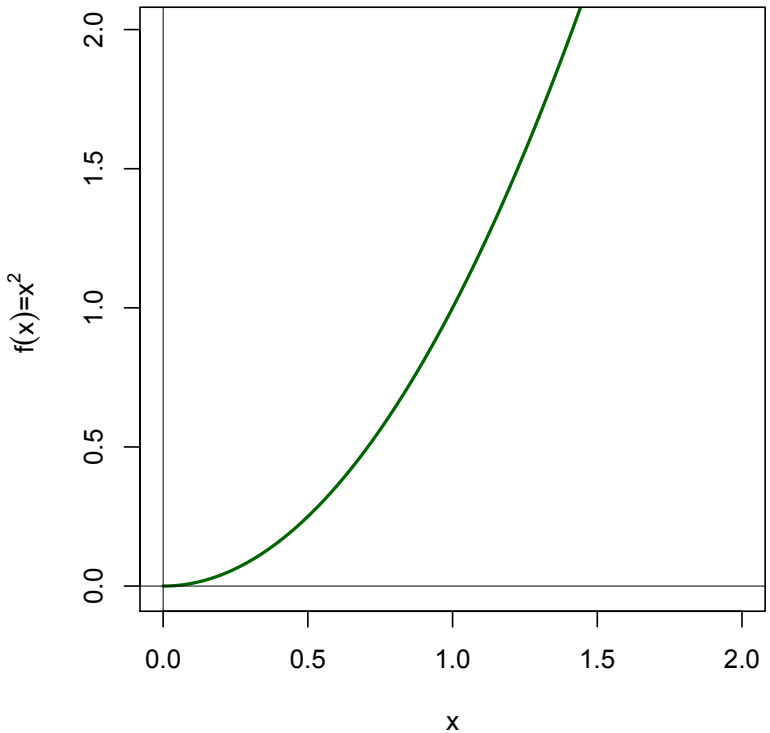
Bijectivité

Définition 3.7

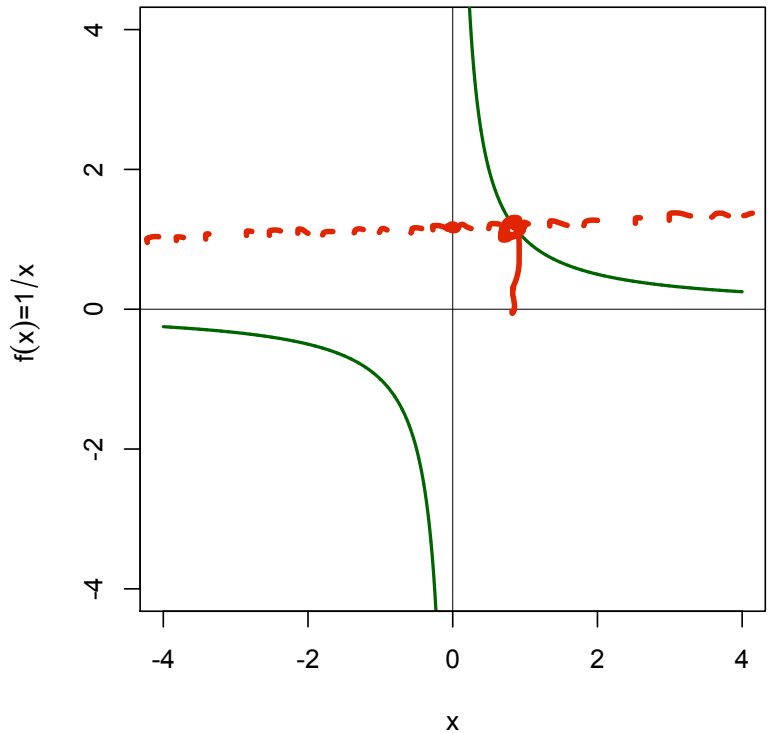
$\forall y \in B,\ \exists! x \in A : y = f(x).$

$f : A \to B$ *est bijective* $\iff$ *Pour tout* $y \in B$, *il existe un seul* $x \in A$ *tel que* $y = f(x)$

($\iff$ $f : A \to B$ *est injective et surjective*).



$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$



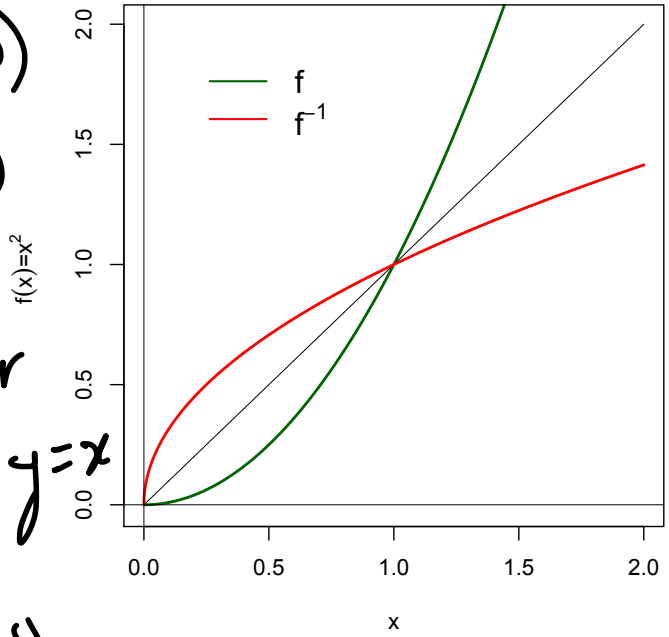
$f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}_0 : x \mapsto 1/x$

Fonction réciproque

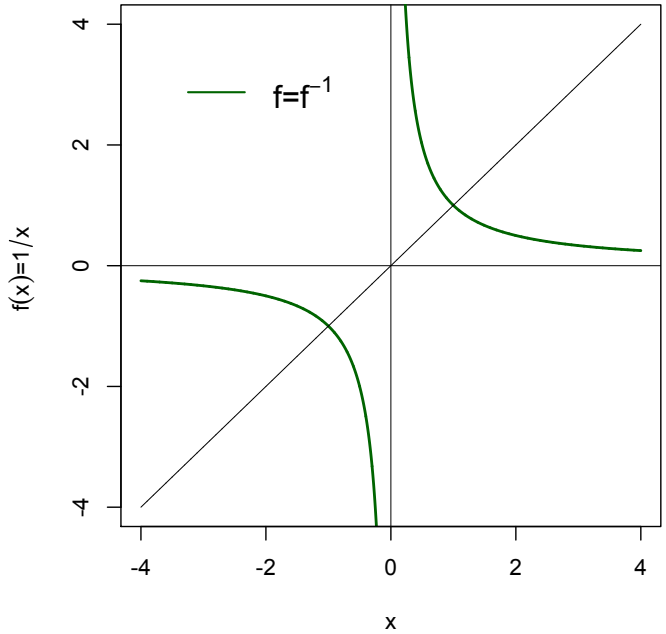
Pour $f : A \to B$ bijective, on peut considérer la fonction réciproque

$$f^{-1} : B \to A : y \mapsto f^{-1}(y),$$

où $f^{-1}(y)$ est l'unique $x (\in A)$ tel que $y = f(x)$. Le graphe de f^{-1} est le symétrique du graphe de f par rapport à la droite d'équation $x = y$ (pourquoi ?).



$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$$
$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x}$$



$$f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}_0 : x \mapsto 1/x$$
$$f^{-1} = f$$

Contenu de la séance

Considérations générales

Injectivité, surjectivité et bijectivité

Composition, croissance, décroissance

Exemples importants

Opérations sur les fonctions

Définition 3.8

Soient $f, g : A \to B$. *Alors* $f = g \iff f(x) = g(x)$ *pour tout* $x \in A$.

Pour définir une fonction univoquement, il suffit donc de définir la valeur qu'elle associe à chaque élément de A.

Définition 3.9

Soient $f, g : A \to \mathbb{R}$ *et* $c \in \mathbb{R}$. *Alors, on définit la somme, produit, multiplication scalaire et quotient via*

(i) $f + g : A \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) + g(x)$,

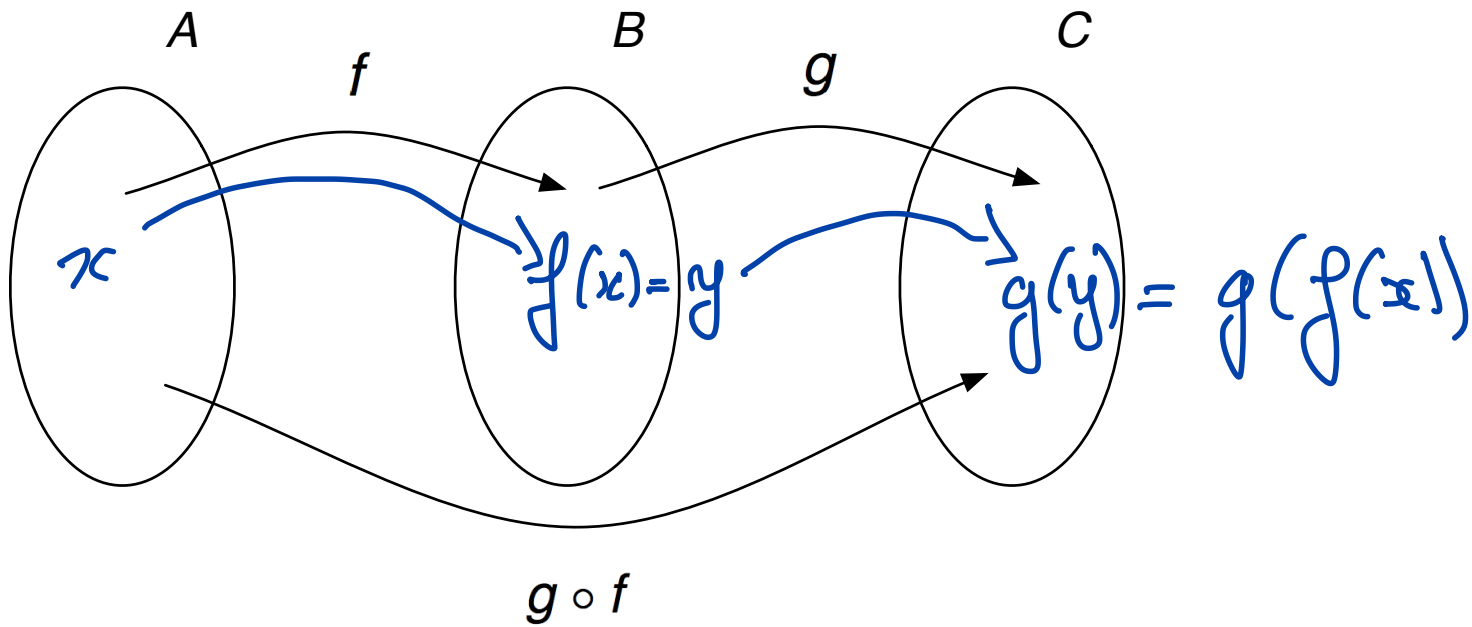
(ii) $fg : A \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)g(x)$,

(iii) pour $c \in \mathbb{R}$, $cf : A \to \mathbb{R} : x \mapsto cf(x)$,

(iv) $f/g : A \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)/g(x)$ *(pour autant que* $g(x) \neq 0$ *pour tout* $x \in A$*).*

Composition

Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$.



Définition 3.10

La fonction composée $g \circ f$ *est la fonction* $g \circ f : A \to C : x \mapsto g(f(x))$.

Composition (suite)

La composition permet de modéliser des effets indirects. Par exemple,

- x : volonté d'un étudiant de réussir son examen de math,
- $y = f(x)$: quantité journalière de travail en math par l'étudiant (en heures),
- $z = g(y)$: note que l'étudiant peut espérer avoir à l'examen de math.

$y = f(x)$ dépend directement de x et $z = g(y)$ dépend directement de y. Mais $z = g(f(x))$ dépend indirectement de x.

Pour augmenter z, le professeur ne peut pas agir sur y, donc il tente d'agir sur x ("mécanisme d'incitation").

En économie, par exemple, on peut tenter de réduire la pollution engendrée par le parc automobile en taxant davantage les véhicules plus polluants.

Composition : propriétés

La composition est associative : pour tout f, g, h qu'on peut composer,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

La composition n'est pas commutative : même quand on peut considérer à la fois $g \circ f$ et $f \circ g$, on peut avoir

$$g \circ f \neq f \circ g.$$

Exemple : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x + 1$ livrent

- $(g \circ f)(x) = x^2 + 1 \rightsquigarrow (g \circ f)(1) = 2$,
- $(f \circ g)(x) = (x+1)^2 \rightsquigarrow (f \circ g)(1) = 4$.

Donc $g \circ f \neq f \circ g$.

Fonction réciproque : propriété

Si $f : A \to B$ est bijective, on a

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A, \qquad \forall x \in A,\ f^{-1}(f(x)) = x.$$

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B, \qquad \forall x \in B,\ f(f^{-1}(x)) = x.$$

où $\mathrm{Id}_C : C \to C : x \mapsto x$ désigne la fonction identité sur l'ensemble C.

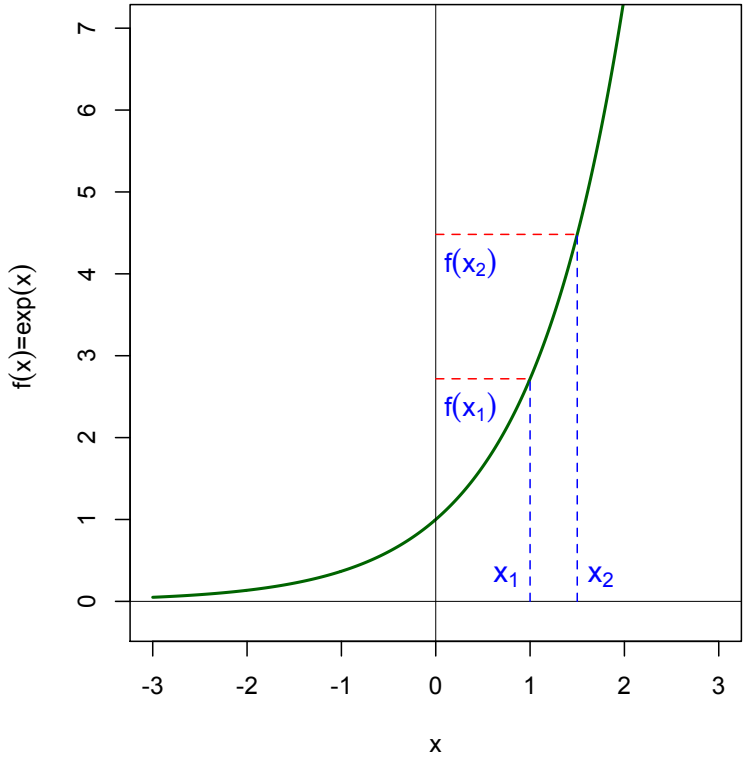
Croissance et décroissance stricte

Définition 3.11

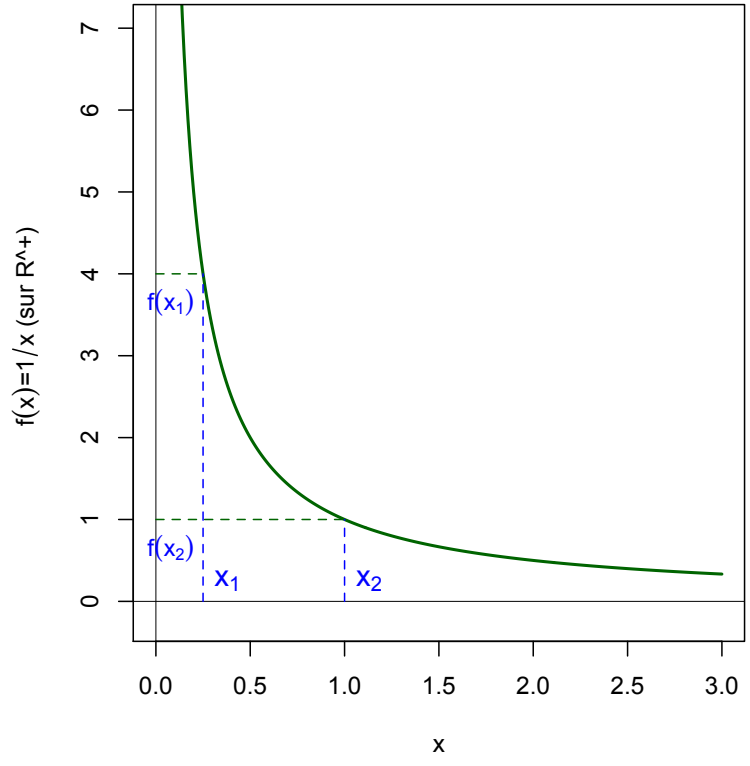
Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Soit $f : A \to B$. On dit que

(i) f est strictement croissante $\iff$ si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) < f(x_2)$,

(ii) f est strictement décroissante $\iff$ si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) > f(x_2)$.



(i) "croissance exponentielle"



(ii) Demande = f(prix) ?

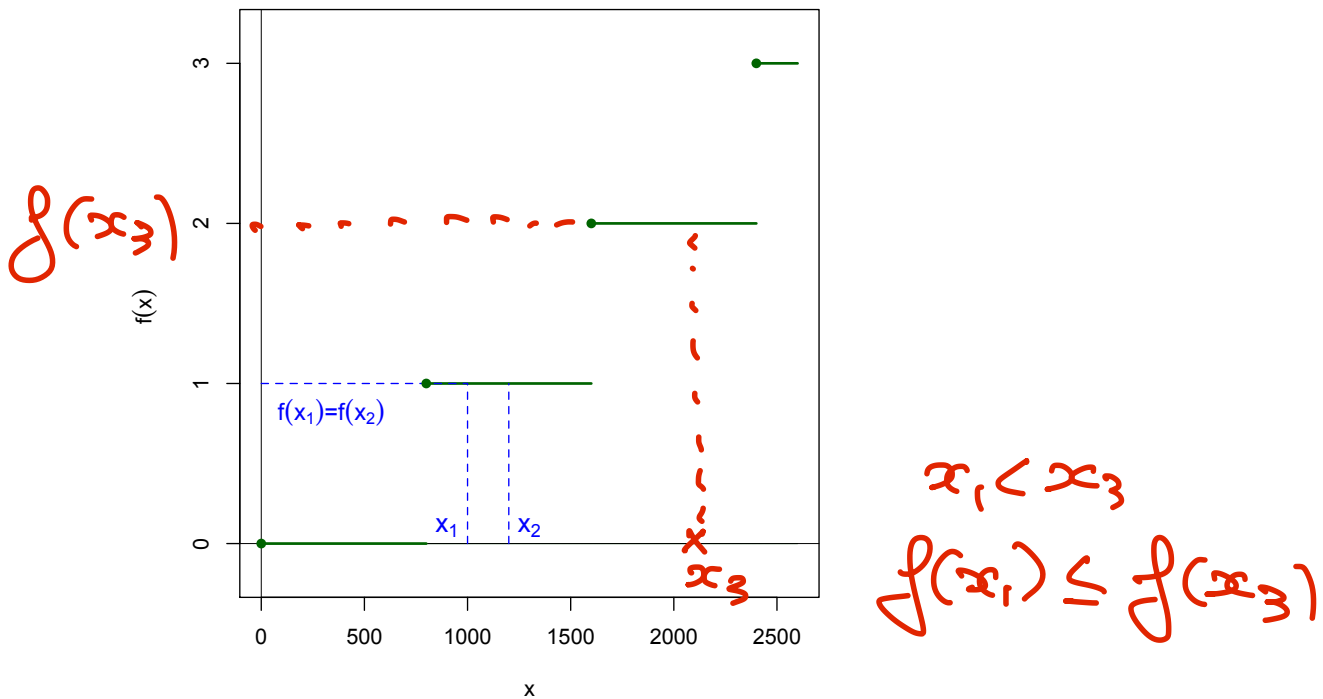
Croissance et décroissance

Définition 3.12

Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Soit $f : A \to B$. On dit que

(i) f *est croissante* $\iff$ *si* $x_1 < x_2$, *alors* $f(x_1) \leq f(x_2)$,

(ii) f *est décroissante* $\iff$ *si* $x_1 < x_2$, *alors* $f(x_1) \geq f(x_2)$.



(i) Combien d'iPhone(s) peut-on acheter avec x €?

Contenu de la séance

Considérations générales

Injectivité, surjectivité et bijectivité

Composition, croissance, décroissance

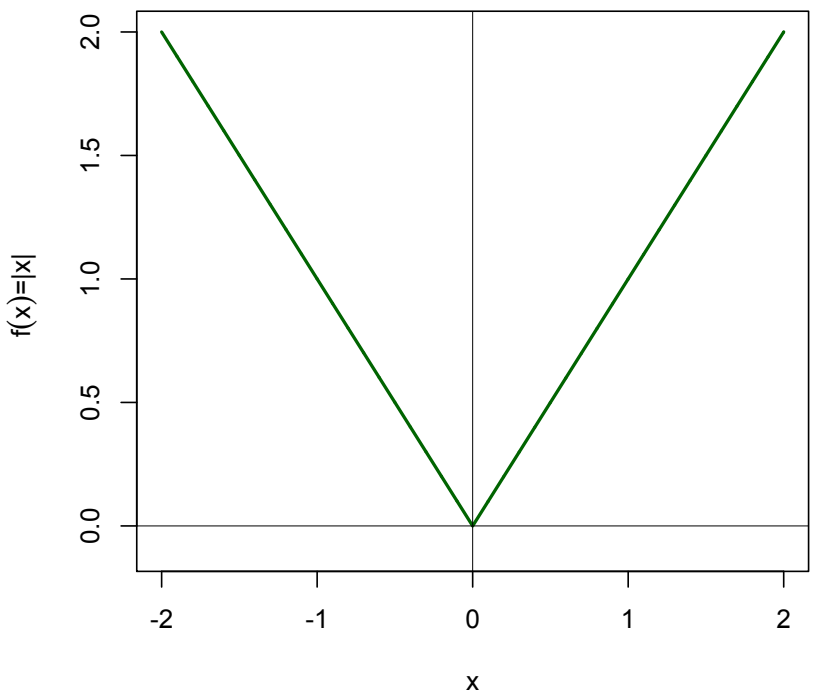
Exemples importants

Valeur absolue

Définition 3.13

La fonction valeur absolue est la fonction $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$, *où*

$$|x| = \begin{cases} -x & si\ x < 0, \\ x & si\ x \geq 0. \end{cases}$$



Exercice : prouver que

- $|x| \geq 0$,
- $|x| \geq x$,
- $\sqrt{x^2} = |x|$,
- $|x^2| = |x|^2 = x^2$, et
- $|xy| = |x|\,|y|$,

pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

Valeur absolue : propriétés

Théorème 3.14 (inégalité triangulaire)

Il est vrai que $|x+y| \leq |x| + |y|$, *pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$.

Démonstration :

$\forall x, y \in \mathbb{R}$. On a $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|xy| \geq xy$.

$$(x+y)^2 \leq x^2 + 2|xy| + y^2 = |x|^2 + 2|xy| + |y|^2.$$

$$(x+y)^2 \leq (|x|+|y|)^2$$

$$\sqrt{(x+y)^2} \leq \sqrt{(|x|+|y|)^2}$$

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

Valeur absolue : propriétés (suite)

Théorème 3.15

Il est vrai que $||x| - |y|| \leq |x - y|$, *pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$.

Démonstration :

On a $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$.

$\geq x^2 - 2|xy| + y^2$.

$|xy| \geqslant xy$

$-2|xy| \leqslant -2xy$.

$\geqslant |x|^2 - 2|xy| + |y|^2$.

$\geqslant (|x| - |y|)^2$.

D'où $|x-y| \geqslant ||x| - |y||$.

* $\sqrt{x^2} = |x|$

* croissance de la fct carré.

Rem : On peut montrer que $||x| - |y|| \leq |x+y|$.

Interlude : prise de notes

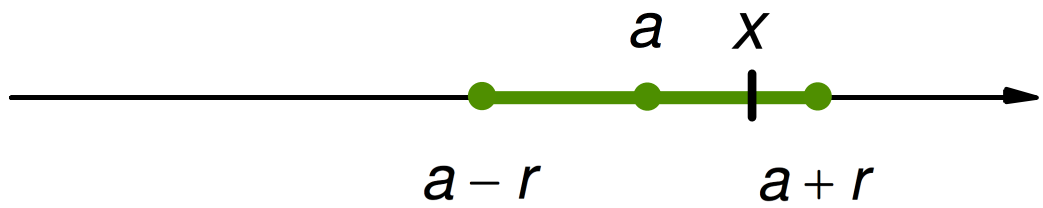
Distance sur $\mathbb{R}$

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$ est la distance entre x et y (ou encore, la longueur de l'intervalle avec x et y comme extrémités !)

Exemples : $d(4,1) = 3$ et $d(8,9) = 1$.

Dans la suite, on lira souvent $|x-a| \leq r$ comme

- $d(x,a) \leq r$ (la distance entre x et a est inférieure à r),
- $x \in [a-r, a+r]$ (x appartient à l'intervalle fermé centré en a et de longueur $2r$).



Fonctions affines

Définition 3.16

Une fonction affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une fonction du type

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto cx + d,$$

où $c, d \in \mathbb{R}$. Pour $d = 0$, la fonction est dite linéaire. Pour $c = 0$, elle est constante.

Le graphe associé est la droite d'équation $y = cx + d$, laquelle est de pente

$$c = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (a \neq b),$$

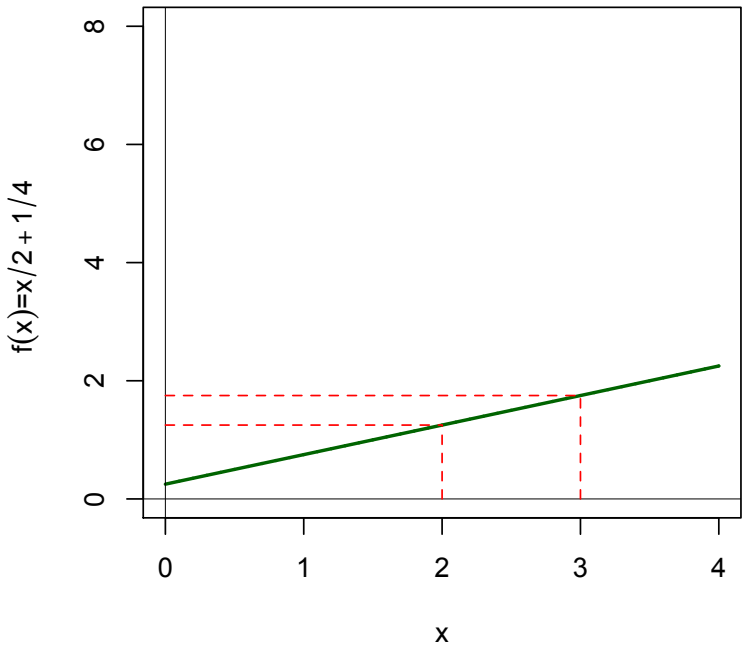
ou de façon équivalente (en posant $b = a + h$),

$$c = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \qquad (h \neq 0).$$

Fonction affine : pente

Interprétation de la pente : si on augmente la quantité $x = a$ de h, alors la valeur $f(a)$ augmente de $f(a+h) - f(a) = ch$.

$f(a+h) = c(a+h)+d$
$= ca + ch + d$
$f(a) = ca + d$
$f(a+h) - f(a) = ca + ch + d - ca - d = ch.$

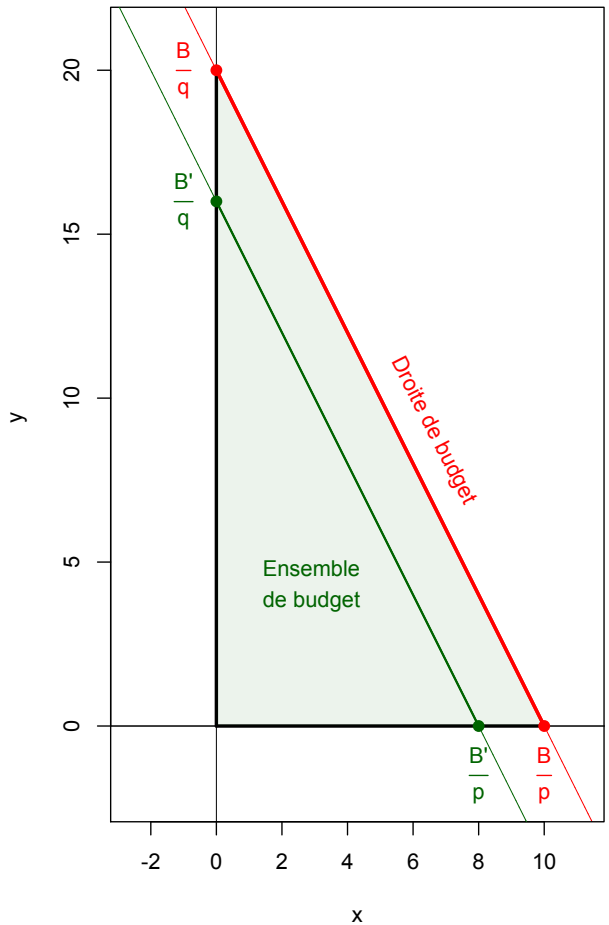


Pour tondre un jardin de x ares, il faut $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ heures.

Pour tondre h ares de plus que prévu, il faudra $ch = \frac{h}{2}$ heures supplémentaires. Et $d = \frac{1}{4}$ (heure)? C'est le temps pour sortir la tondeuse, etc.

Budget

Considérons deux biens X et Y dont les prix respectifs sont $p(>0)$ et $q(>0)$. Quelles sont les quantités x (de X) et y (de Y) qui peuvent être achetées par un consommateur disposant d'un budget $B(>0)$?



En dépensant B, on peut acheter des quantités x et y telles que $px + qy = B$, c'est-à-dire

$$y = -\frac{p}{q}x + \frac{B}{q}$$

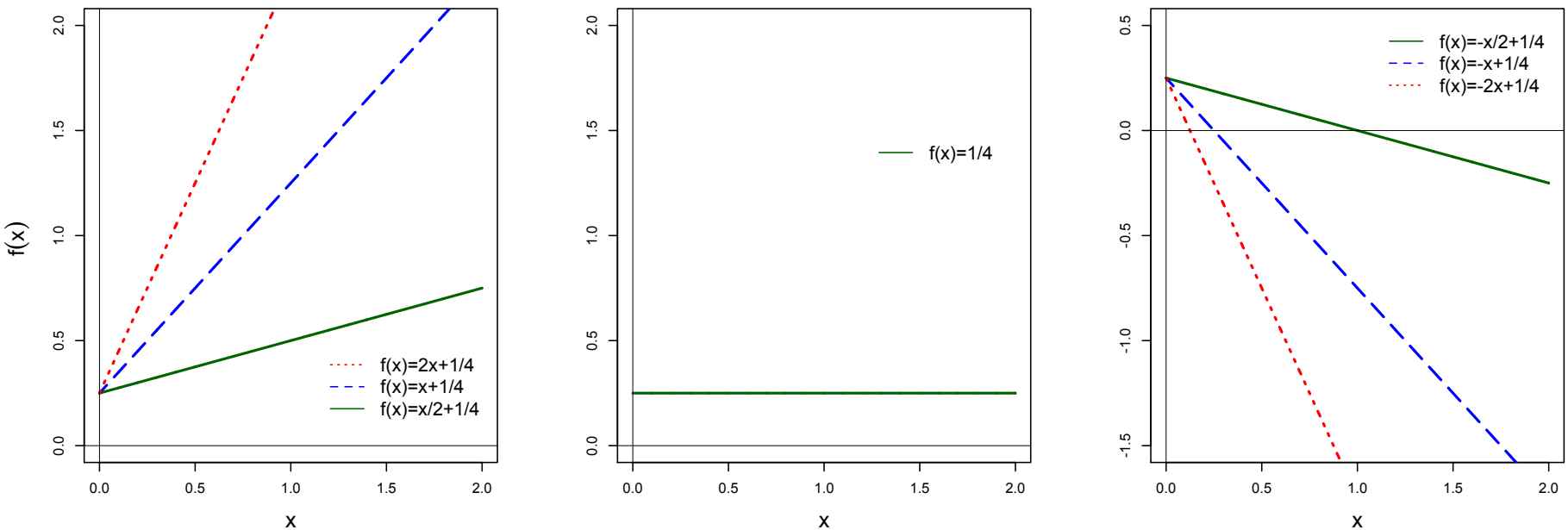
(équation de la droite de budget).

Bien entendu, on peut aussi dépenser seulement $B'(< B)$, ce qui engendre l'ensemble de budget.

Fonction affine : interprétation de c

Le signe de c décide de la croissance/décroissance de f :

- si $c > 0$, alors $x \mapsto cx + d$ est strictement croissante,
- si $c = 0$, alors $x \mapsto cx + d$ est constante,
- si $c < 0$, alors $x \mapsto cx + d$ est strictement décroissante.



Et $|c|$ décide de la vitesse de la croissance/décroissance...

Réciproque d'une fonction affine

Exercice : vérifier que

- Si $c \neq 0$,

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto cx + d \quad .$$

est bijective et a pour fonction réciproque

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{c}x - \frac{d}{c}$$

(f^{-1} est donc aussi affine, de pente $1/c$).

- Si $c = 0$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto cx + d$ n'est pas bijective.

Si $y = cx + d$.

$y - d = cx$.

$\frac{y}{c} - \frac{d}{c} = x$.

$f^{-1}(x) = \frac{x}{c} - \frac{d}{c}$.

Fonction polynomiale

$$\sum_{i=6}^{10} a_i = a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}.$$

Considérons la notation

$$\sum_{i=k}^{\ell} a_i = a_k + a_{k+1} + \ldots + a_\ell,$$

où k et ℓ sont des entiers tels que $k \leq \ell$.

Définition 3.17

Une fonction polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une fonction du type

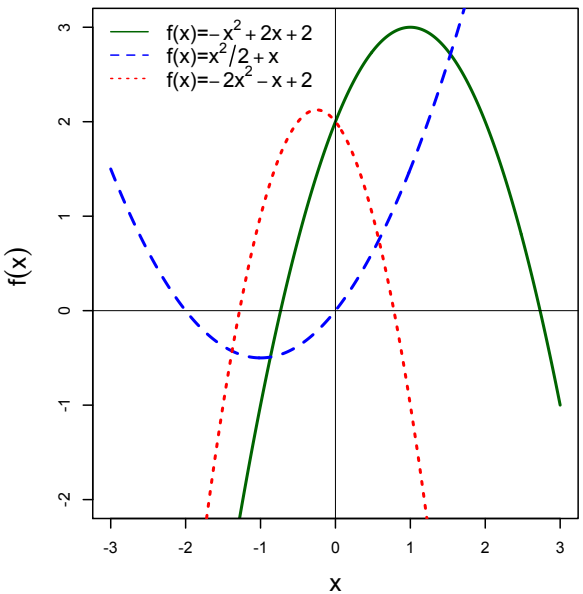
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{i=0}^{n} c_i x^i = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n,$$

où $n \in \mathbb{N}$, $c_n \in \mathbb{R}_0$, et $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$.

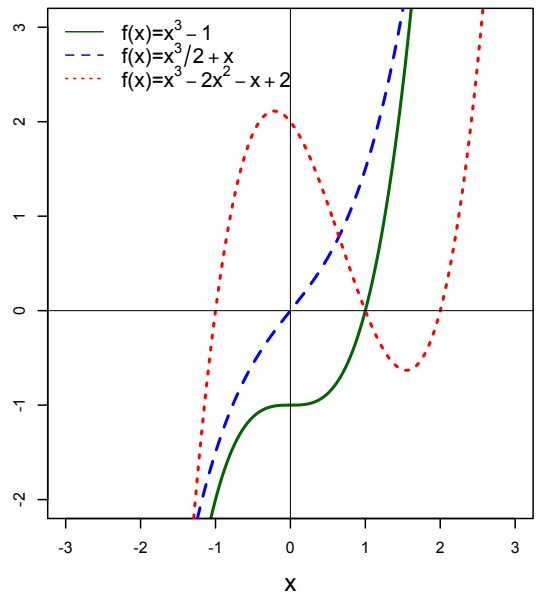
Le naturel n est appelé le degré de la fonction polynomiale. Pour $n = 2$, on parle de fonctions quadratiques. Pour $n = 3$, de fonctions cubiques.

Fonctions polynomiales : illustration

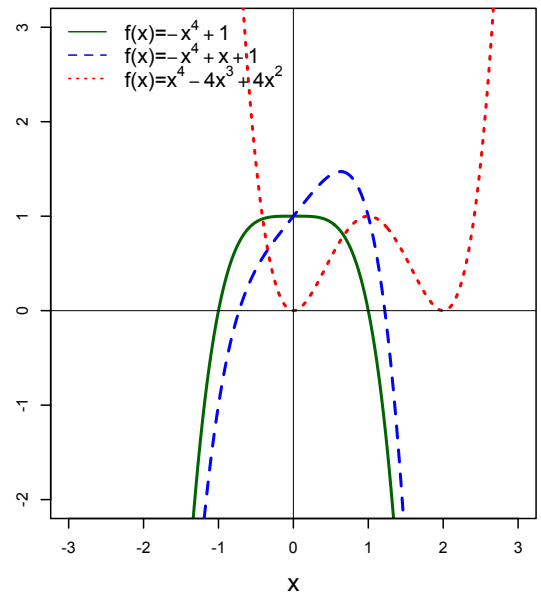
Ces fonctions permettent de modéliser des comportements complexes



fonctions quadratiques



fonctions cubiques



fonctions polynomiales de degré 4

Fonctions rationnelles

Le quotient de deux fonctions polynomiales définit une *fonction rationnelle*.

Définition 3.18

Une fonction rationnelle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une fonction du type

$$f : D_f (\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n}{d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \ldots + d_m x^m},$$

où $m, n \in \mathbb{N}$, $c_n, d_m \in \mathbb{R}_0$, *et* $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}, d_0, d_1, \ldots, d_{m-1} \in \mathbb{R}$.

Le domaine de définition D_f est $\mathbb{R} \setminus A$, où A est l'ensemble des réels en lesquels $d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \ldots + d_m x^m$ prend la valeur 0.

Fonctions exponentielles

Définition 3.19

Une fonction exponentielle est une fonction du type

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto a^x,$$

où $a > 0$ *(est appelé base).*

$(a^2)^3 = a^{2\times 3} = a^6.$

Une telle fonction satisfait les propriétés

$$a^x a^y = a^{x+y} \quad \text{et} \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

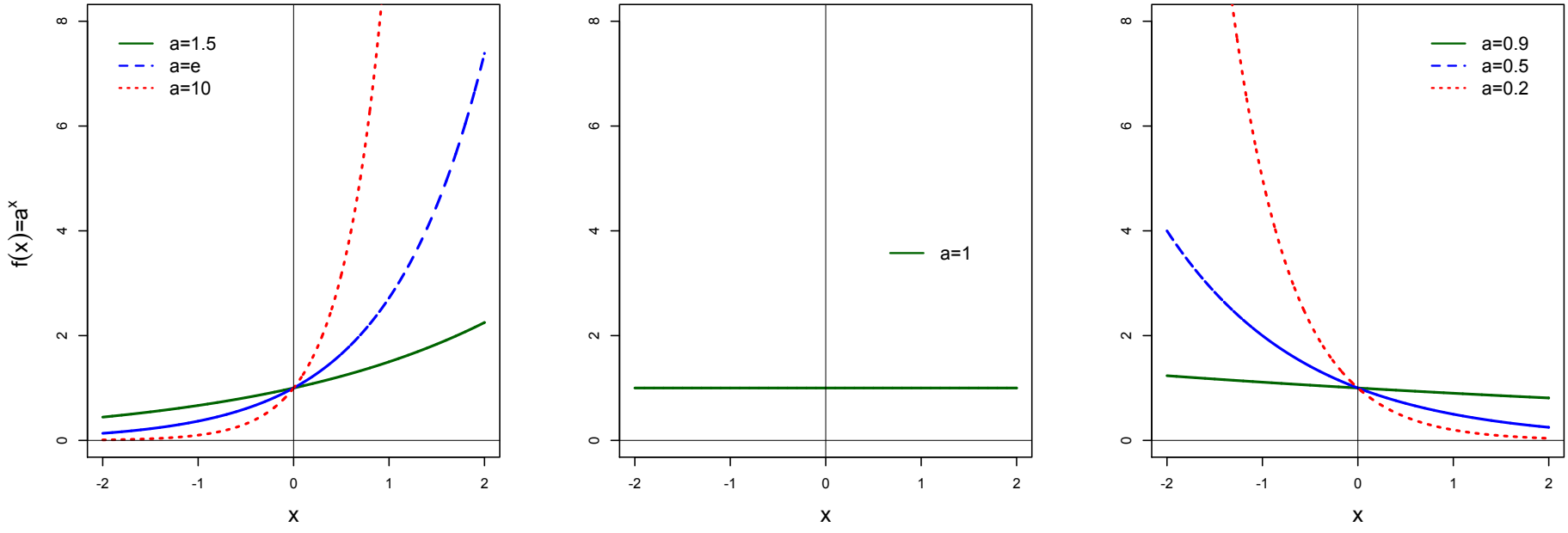
$a^2 a^3 = a^{2+3} = a^5$

La fonction exponentielle la plus courante est celle dont la base est le nombre d'Euler $e \approx 2.718282$. Dans la suite, e^x sera souvent noté $\exp(x)$.

Exponentielles : le rôle de la base

Le signe de $a - 1$ décide de la croissance/décroissance :

- si $a > 1$, alors $x \mapsto a^x$ est strictement croissante,
- si $a = 1$, alors cette fonction est constante,
- si $a \in]0, 1[$, alors cette fonction est strictement décroissante.

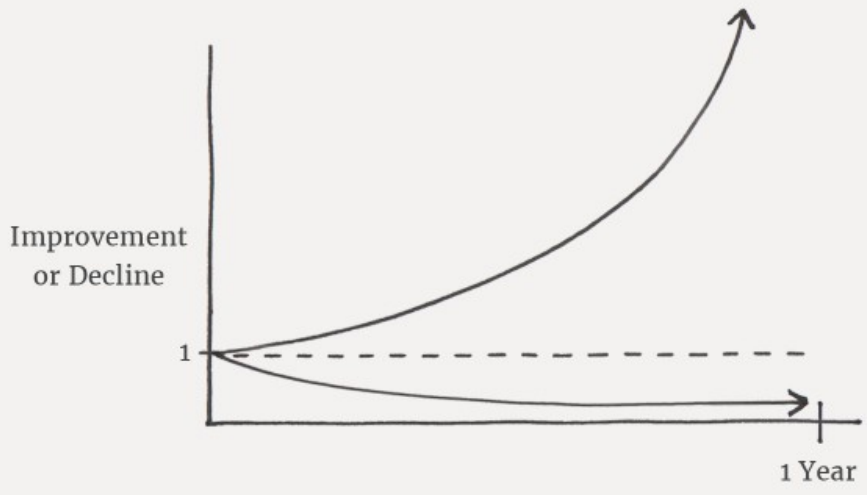


Et $|a - 1|$ décide de la "vitesse" de la croissance/décroissance...

The Power of Tiny Gains

1% better every day $1.01^{365} = 37.78$

1% worse every day $0.99^{365} = 0.03$



JamesClear.com

Fonctions logarithmes

⚠ à reprendre ici prochain cours

Pour $a \neq 1$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto a^x$ est bijective et admet donc une fonction réciproque.

Définition 3.20

Pour toute base $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$, la fonction logarithmique

$$\log_a : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \log_a x$$

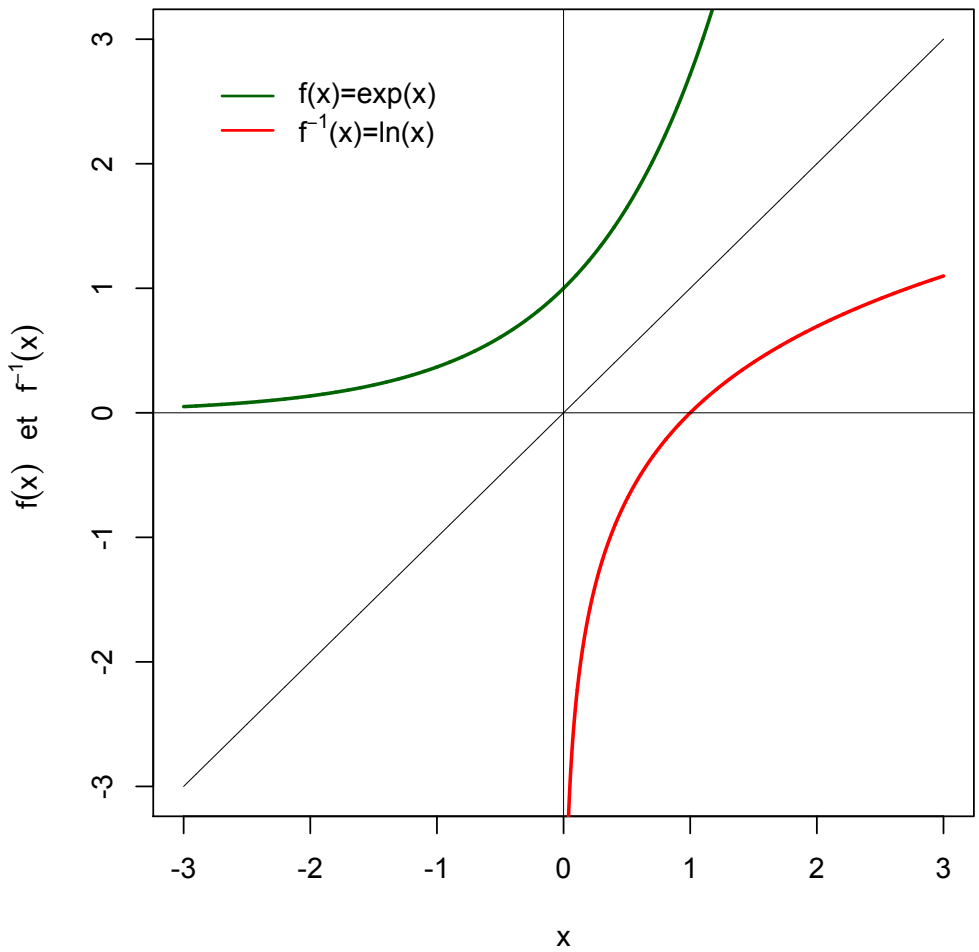
est la fonction réciproque de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto a^x$.

Les fonctions logarithmiques vérifient

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a(x^z) = z(\log_a x) \quad \text{et} \quad \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}_0^+$, $z \in \mathbb{R}$, et $a, b \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$. Le logarithme naturel ou népérien est celui en base e. On le note souvent log ou ln.

Logoticône

[redacted]
@[redacted]
log(😅) = 💧log😄
9:34 am · 28 Jul 2021 · Twitter for Android
1,327 Retweets
113 Quote Tweets
9,244 Likes

Exp et log : graphes